SOLUZIONI ALLENAMENTO GARA A SQUADRE ON-LINE – BIENNIO SUPERIORI (29/11/2010)

1. BIANCAVILLA - IL PROF. OAK [24]
Immaginando il gruppo ASH come una lettera unica, la parola SPLASH è composta dalle "lettere" S – P – L – ASH. Così facendo si ottengono esattamente $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibili anagrammi.

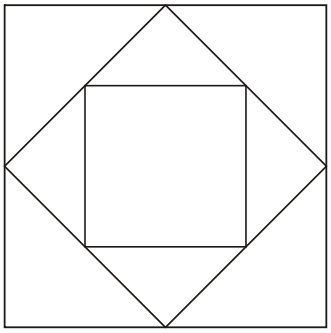
2. PLUMBEOPOLI - BROK [35]
Compiliamo una tabella:

Mese	Divisori
1	1
2	1-2
3	1-3
4	1-2-4
5	1-5
6	1-2-3-6

Mese	Divisori
7	1-7
8	1-2-4-8
9	1-3-9
10	1-2-5-10
11	1-11
12	1-2-3-4-6-12

Il totale è di 35 giorni.

3. MONTELUNA - BILL [1]



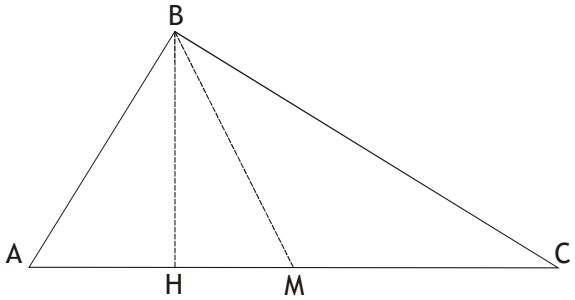
Osserviamo che il terzo quadrato ha il lato pari a $\frac{1}{2}$ del lato di partenza.
Ogni due quadrati il lato si dimezza.
Arrivati all'undicesimo quadrato, il lato del quadrato interno sarà $\frac{1}{32}$ del lato del quadrato iniziale. L'area è dunque di 1.

4. CELESTOPOLI - MISTY [138]
Tutti i numeri da 200 a 299 hanno il numero 2 come cifra delle centinaia (100 numeri).
Ogni 100 numeri ce ne sono 10 che hanno la cifra 2 come decina (20 valori, perché non devo ricontare quelli già contati al punto precedente).
Ogni 10 numeri, uno solo ha la cifra 2 come unità.
Da 100 a 400 ci sono in tutto 300 numeri e quindi 30 decine di numeri, ma devo considerare che le 10 decine del 200 sono già state contate e che per ogni centinaia, la decina del 2 è già stata contata.
Mi avanzano dunque 18 decine che mi aggiungono altrettanti numeri contenenti la cifra 2.
Quindi in totale vi sono:
$tot = 100 + 20 + 18 = 138$

5. ARANCIOPOLI - LT. SURGE [420]
Applicando il teorema di Pitagora ed usando la dimensione minore della lastra come ipotenusa, si ottiene che $h = \sqrt{580^2 - 400^2} = 420\,\text{cm}$.

6. LAVANDONIA - TORRE POKÉMON [0]
Il resto è ovviamente 0.
Entrambi gli addendi sono divisibili per 8. Il primo perché contiene il fattore 8 nella moltiplicazione, il secondo perché è proprio una potenza di 8.

7. AZZURROPOLI - ERIKA [5]
Prima soluzione:
$AB = 6\,\text{cm}$
$BC = 8\,\text{cm}$
$AM = MC$
Come prima cosa calcoliamo l'ipotenusa: $AC = 10\,\text{cm}$
E di conseguenza i due segmenti $AM = MC = 5\,\text{cm}$
Utilizzando la formula dell'area, possiamo calcolare il valore dell'altezza:



$BH = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = 4{,}8\,\text{cm}$

Ora applicando il teorema di Pitagora (o il primo teorema di Euclide) possiamo calcolare AH:

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 3{,}6\,\text{cm}$

$HM = AM - AH = 1{,}4\,\text{cm}$

E quindi, con il teorema di Pitagora possiamo ottenere BM:

$BM = \sqrt{BH^2 + HM^2} = 5\,\text{cm}$

Seconda soluzione:

Chiamando i cateti a e b e l'ipotenusa c, possiamo applicare la formula generale per le mediane (che vale per ogni triangolo)

$m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(36+64) - 100} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100} = 5\,\text{cm}$

8. FUCSIAPOLI - KOGA [24]

Calcoliamo le ultime due cifre del numero 2^n fino a che non troviamo una ripetizione:

ultime due cifre	n
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
28	7
56	8

ultime due cifre	n
12	9
24	10
48	11
96	12
92	13
84	14
68	15

ultime due cifre	n
36	16
72	17
44	18
88	19
76	20
52	21
4	22

Si osserva che 2^{22} è come 2^2, quindi

$2^{2010} = \left(2^{22}\right)^{91} \cdot 2^8$ finisce allo stesso modo di $2^2 \cdot 2^8 = 2^{10} = 1024$.

9. ZAFFERANOPOLI - SILPH SPA [4509]

Sia n il numero dei componenti; dal testo si evince che:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 5n$

$\dfrac{n(n+1)}{2} = 5n$

$n(n+1) = 10n$

$n(n-9) = 0$

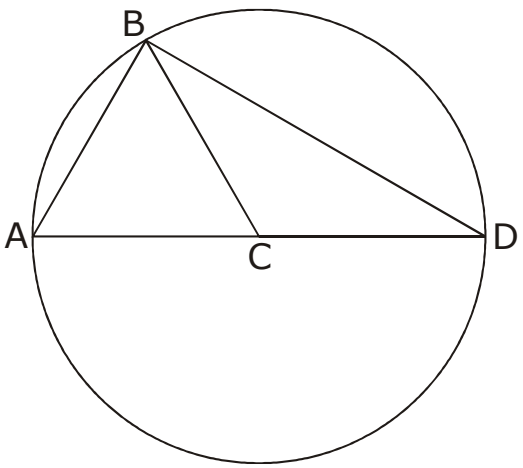
$n = 9$ unica soluzione accettabile.

Le *ball* sono dunque 45.

10. ZAFFERANOPOLI - SABRINA [30]

Eseguendo la costruzione descritta, si osserva che il triangolo ABC è un triangolo equilatero, il triangolo BCD isoscele e il triangolo ABD rettangolo in B.

Ne segue che $B\hat{D}A = C\hat{B}D = 90° - 60° = 30°$.



11. ISOLA CANNELLA - BLAINE [32]
Riscriviamo il numero dato in altra maniera:

$4^{17} \cdot 5^{30} = 2^{34} \cdot 5^{30} = (2 \cdot 5)^{30} \cdot 2^4 = 16 \cdot 10^{30}$

Il numero ha dunque 32 cifre.

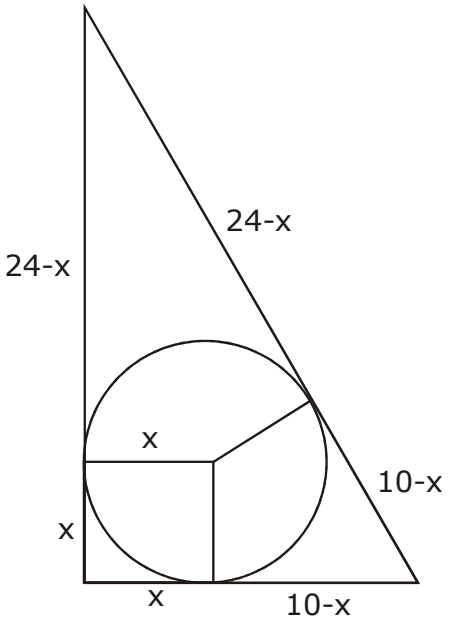
12. L'ULTIMA MEDAGLIA: SMERALDOPOLI - GIOVANNI [4]
Prima soluzione:

Il modo più rapido per ottenere il raggio della circonferenza inscritta è quello di applicare la formula $r = \frac{A}{p}$ dove A è l'area del triangolo e p il semiperimetro.
Essendo rettangolo, possiamo ottenere l'ipotenusa con il teorema di Pitagora:

$$p = \frac{10 + 24 + \sqrt{10^2 + 24^2}}{2} = \frac{10 + 24 + 26}{2} = 30\,\text{cm}$$

$$A = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120$$

$$r = \frac{120}{30} = 4\,\text{cm}$$



Secondo metodo risolutivo:
Chiamando x il raggio della circonferenza inscritta, si osserva che è possibile scrivere l'ipotenusa del triangolo come somma di $(24-x)+(10-x)$ utilizzando il teorema delle tangenti.
D'altra parte, l'ipotenusa misura 26, quindi

$(24-x)+(10-x) = 26$

$-2x = -8$

$x = 4\,\text{cm}$

13. ALTOPIANO BLU - LA LEGA POKÉMON [120]
La cifra 1 compare 1 volta per ogni decina, 10 volte nella decina del 10.

Da 1 fino a 99 la cifra 1 compare 20 volte

Da 100 in poi la troviamo nella cifra delle centinaia.

Procediamo di 10 in 10:

da 100 a 109 troviamo 10 1 nella cifra delle centinaia, più 1 nella cifra delle unità, per un totale di 31 cifre 1 utilizzate.

Da 110 a 119 ne troviamo 10 nelle centinaia, 10 nelle decine ed 1 nelle unità, per un totale di 52

La pagina 120 contiene il 53-esimo 1.

14. I SUPERQUATTRO - LORELEI [4]
La prima cosa da osservare è che n deve essere pari, e minore o uguale a 30.
A questo punto compiliamo una tabella per i valori n, $2n$ e $n+30$

n	*2n*	*n+30*	
2	4	32	OK
4	8	34	
6	12	36	OK
8	16	38	
10	20	40	OK
12	24	42	

14	28	44	
16	32	46	
18	36	48	
20	40	50	
22	44	52	
24	48	54	
26	52	56	
28	56	58	
30	60	60	OK

Solo in 4 casi si ha la divisibilità tra $2n$ e $n+30$

15. I SUPERQUATTRO - BRUNO [34]

La probabilità di rispondere correttamente è $\frac{1}{3}$, di sbagliare $\frac{2}{3}$.

Ora il test verrà superato se si risponde a tutte le domande correttamente: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$,

oppure sbagliandone una sola: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$, solo che in questo caso abbiamo 3 modi diversi, cioè possiamo sbagliare la prima o la seconda o la terza domanda.

In totale, dunque avremo $\frac{1}{27}+3\cdot\frac{2}{27}=\frac{7}{27}$ probabilità di azzeccare almeno 2 risposte su 3.

16. I SUPERQUATTRO - AGATHA [2401]

Dobbiamo trovare un numero di 4 cifre $ABCD$ tale che $(A+B+C+D)^4 = ABCD$

Procediamo al contrario.

Cerchiamo intanto i numeri di 4 cifre che siano la quarta potenza di numeri naturali:

5 ha come quarta potenza 625, quindi la somma $A+B+C+D$ dovrà essere maggiore di 5.

Calcoliamo $6^4=1296$ che ha per somma delle cifre 18.

$7^4=2401$ che per somma delle cifre ha proprio 7.

17. I SUPERQUATTRO - LANCE [1025]

Essendo $p(x)=\left(x^3-4x^2+5x-1\right)^{12}\cdot\left(5x^4+x^3-4x^2\right)^{10}+1$

la somma dei sui coefficienti si trova calcolando

$$p(1)=\left(1^3-4\cdot1^2+5\cdot1-1\right)^{12}\cdot\left(5\cdot1^4+1^3-4\cdot1^2\right)^{10}+1=1^{12}\cdot2^{10}+1=1024+1=1025$$

18. IL CAMPIONE - GARY OAK [500]

Dobbiamo calcolare $A-G$; procediamo accoppiando i denominatori uguali:

$$A-G=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\ldots+\frac{1001^2}{2001}-\frac{1^2}{3}-\frac{2^2}{5}-\frac{3^2}{7}-\ldots-\frac{1001^2}{2003}=$$

$$=1+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\ldots+\frac{1001^2-1000^2}{2001}-\frac{1001^2}{2003}=$$

$$=1+1+1\ldots+1-\frac{1001^2}{2003}$$

Dove nell'ultima uguaglianza compaiono 1001 addendi 1.

$$1001-\frac{1001^2}{2003}\cong 1001-500{,}25=500{,}75$$